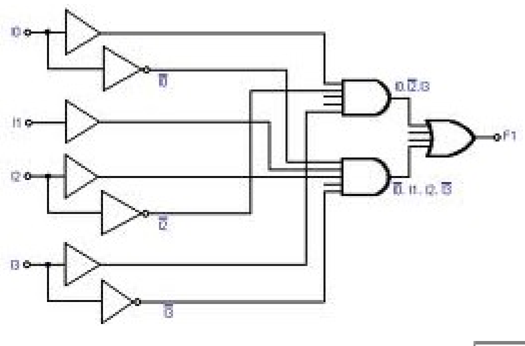
Systèmes logiques combinatoires

Table des matières

Les fonctions logiques combinatoires, directement issues de l'algèbre de Boole, sont les outils de base de l'électronique numérique. Elles sont mises en œuvre sous forme de portes logiques qui sont construites à partir de plusieurs transistors connectés de manière adéquate.



1. Variable binaire

On appelle variable binaire une variable pouvant prendre seulement deux valeurs 0 ou 1.

Ces valeurs peuvent représenter : un interrupteur ouvert ou fermé, un transistor passant ou bloqué, la présence ou l'absence d'une tension...

Une variable E peut être complémentée, elle est alors notée $\bar{E}$ ou ¬E (E barre).

Compléter la table de vérité ci-contre :

E	$\bar{E}$
0	
1	

2. Fonctions logiques de base

Chacune des fonctions logiques de base possède sa **représentation graphique** normalisée, son **équation** et sa **table de vérité**.

La représentation graphique d'une fonction logique de base est également appelée opérateur logique.

2.1. Fonction OUI (YES)

La sortie S est égale à la valeur de l'entrée.

Représentation graphique :

Équation logique : S = e

Schéma électrique :

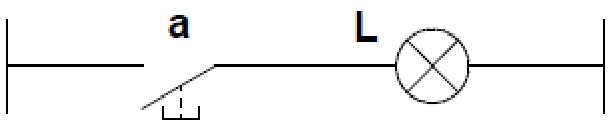


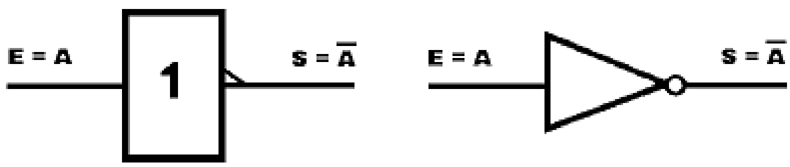
Table de vérité :

e	S
0	
1	

2.2. Fonction NON (NOT)

La sortie S est égale à la valeur inverse de l'entrée.

Représentation graphique :



Équation logique : S = $\bar{e}$

Schéma électrique :

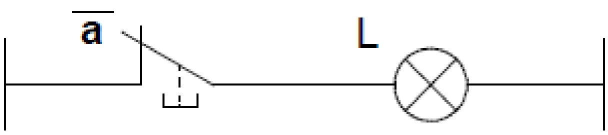


Table de vérité :

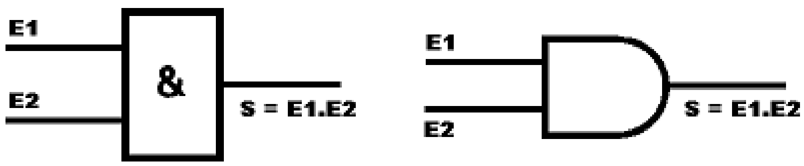
e	S
0	
1	

2.3. Fonction ET (AND)

La sortie S est vraie si **toutes** les entrées e_i sont vraies.

si e1 = 1 ET e2 = 1 alors S = 1

Représentation graphique :



Équation logique : S = e1.e2

Schéma électrique :

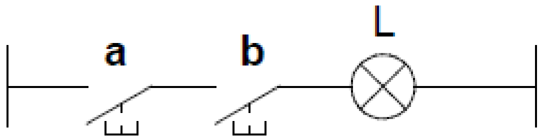


Table de vérité :

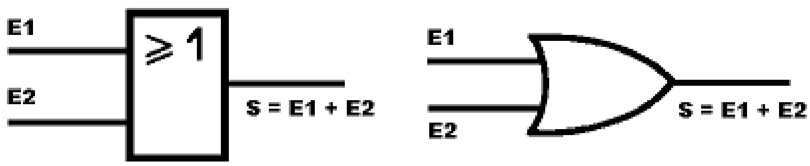
e1	e2	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

2.4. Fonction OU (OR)

La sortie S est vraie si **au moins une** des entrées e_i est vraie.

si e1 = 1 OU e2 = 1 alors S = 1

Représentation graphique :



Équation logique : S = e1+e2

Schéma électrique :

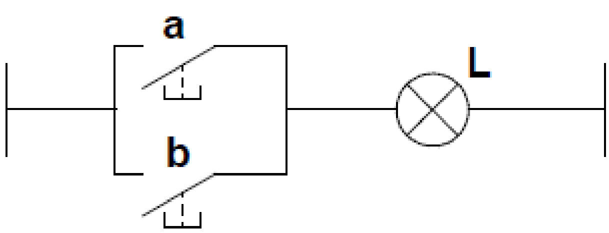


Table de vérité :

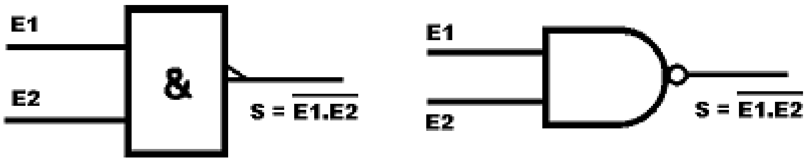
e1	e2	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

2.5. Fonction NON-ET (NAND)

La sortie S est vraie si **au moins une** des entrées e_i est fausse.

si e1 = 0 OU e2 = 0 alors S = 1

Représentation graphique :



Équation logique : $S=\overline{e1.e2}=\overline{e1}+\overline{e2}$

Schéma électrique :

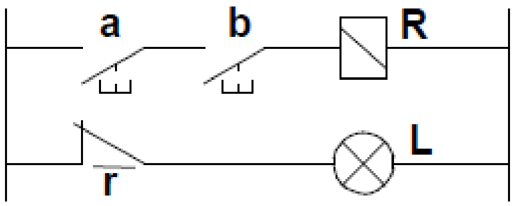


Table de vérité :

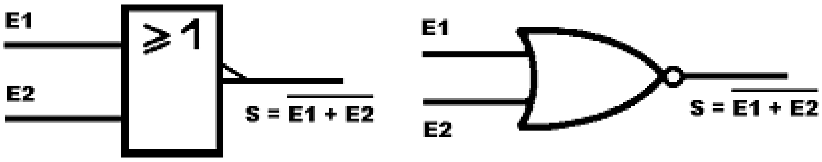
e1	e2	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

2.6. Fonction NON-OU (NOR)

La sortie S est vraie si **toutes** les entrées e_i sont fausses.

si e1 = 0 ET e2 = 0 alors S = 1

Représentation graphique :



Équation logique : $S=\overline{e1+e2}=\overline{e1}\,.\overline{e2}$

Schéma électrique :

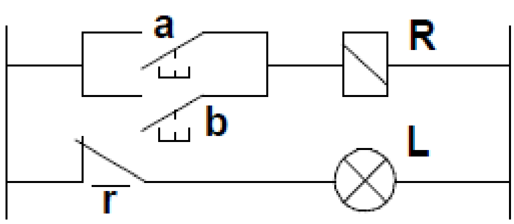


Table de vérité :

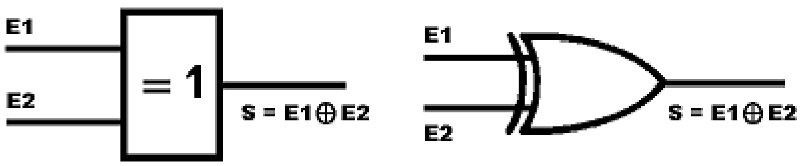
e1	e2	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

2.7. Fonction OU Exclusif (XOR)

La sortie S est vraie si **toutes** les entrées e_i ont des valeurs distinctes.

si e1 ≠ e2 alors S = 1

Représentation graphique :



Équation logique : $S = e1 \oplus e2 = e1.\bar{e}2 + \bar{e}1.e2$

Schéma électrique :

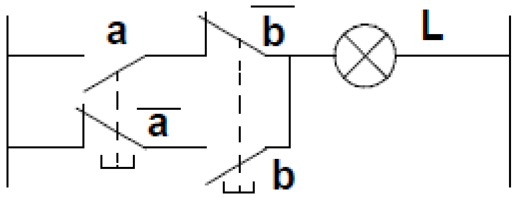


Table de vérité :

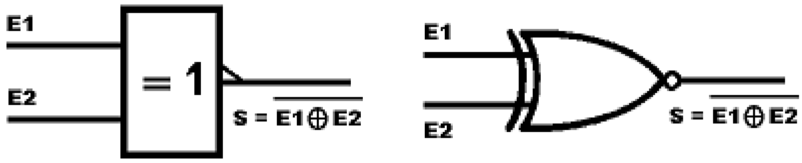
e1	e2	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

2.8. Fonction NON-OU Exclusif (XNOR)

La sortie S est vraie si **toutes** les entrées e_i sont identiques.

si e1 = e2 alors S = 1

Représentation graphique :



Équation logique : $S = \neg(e1 \oplus e2) = \bar{e}1.\bar{e}2 + e1.e2$

Schéma électrique :

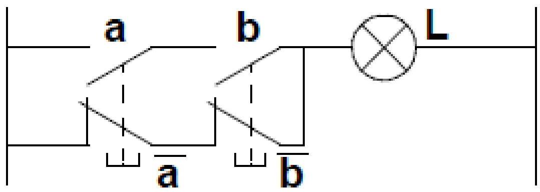


Table de vérité :

e1	e2	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

3. Propriétés utiles des fonctions logiques

3.1. Propriétés des opérateurs

$\neg\bar{a} = a$ (double complémentation)

$a.b = b.a$	$a+b = b+a$	$a \oplus b = b \oplus a$
$a.(b.c) = (a.b).c$	$a+(b+c) = (a+b)+c$	$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
$a.(b+c) = a.b + a.c$	$a + b.c = (a+b).(a+c)$	

Exercices :

$a.1 =$	$a.0 =$	$a.a =$	$a.\bar{a} =$
$a+1 =$	$a+0 =$	$a+a =$	$a+\bar{a} =$
$a \oplus 1 =$	$a \oplus 0 =$	$a \oplus a =$	$a \oplus \bar{a} =$

3.2. Théorèmes de DE MORGAN[1]

Le complément d'une somme logique (non arithmétique) est égal au produit logique (non arithmétique) des termes complémentés.

$$\overline{a+b}=\overline{a}.\overline{b}$$

Le complément d'un produit logique (non arithmétique) est égal à la somme logique (non arithmétique) des termes complémentés.

$$\overline{a.b}=\overline{a}+\overline{b}$$

L'ensemble des propriétés ci-dessus permettent notamment la simplification des fonctions logiques.

Exercice : simplifier les équations logiques suivantes

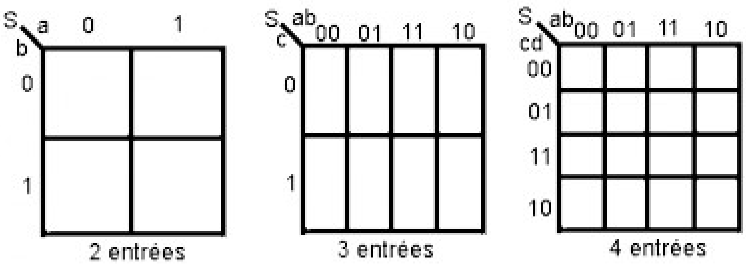
- a.(ā+b)
- ā.b.c + a.b.c

3.3. Tableau de Karnaugh[2]

Le tableau de Karnaugh n'est qu'une table de vérité dont l'organisation permet de reconnaître rapidement les simplifications possibles. Les équations qu'ils donnent ne sont pas forcément les plus simples, mais elles n'en sont jamais loin.

Contrairement au tableau de vérité normal, il faut un tableau de Karnaugh pour chacune des sorties. Si on a 3 sorties, par exemple, alors il faudra représenter 3 tableaux.

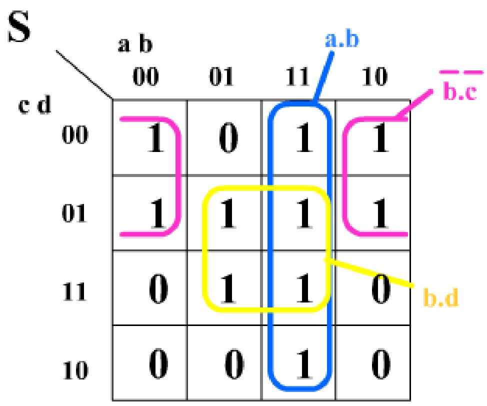
Ci-dessous la structure des tableaux de Karnaugh en fonction du nombre d'entrées.



Accéder des [tableaux à résolution automatique](#).

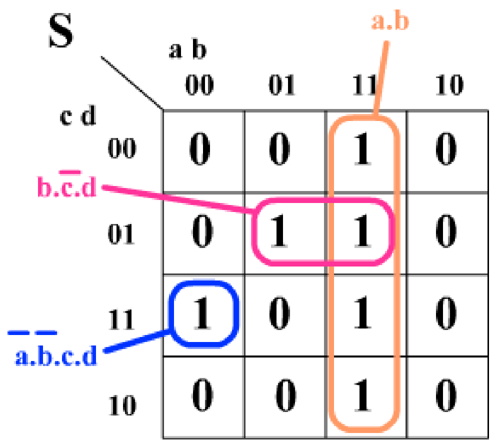
1 Augustus De Morgan (1806-1871) : Logicien et Mathématicien Anglais
2 Maurice Karnaugh (1924 à New York)

Exemple 1 :



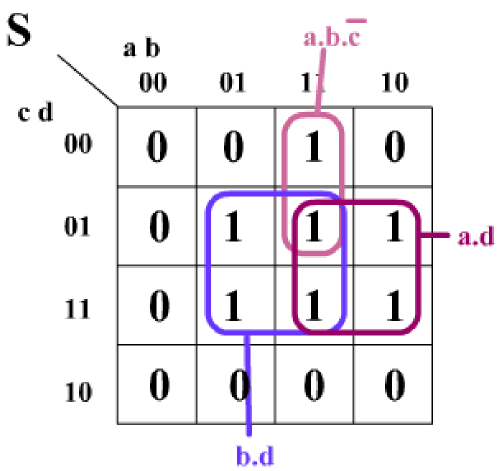
$$S = a.b + \overline{b}.\overline{c} + b.d$$

Exemple 2 :



$$S = a.b + b.\overline{c}.d + \overline{a}.\overline{b}.c.d$$

Exemple3 :



$$S = a.b.\overline{c} + a.d + b.d$$

4. Exercices

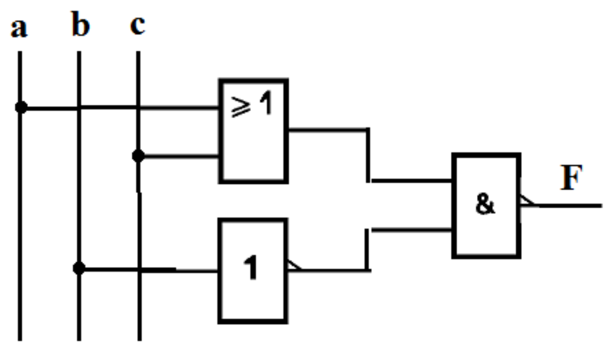
4.1. Exercice 1

Donner l'équation logique de F à partir de la table de vérité ci-dessous :

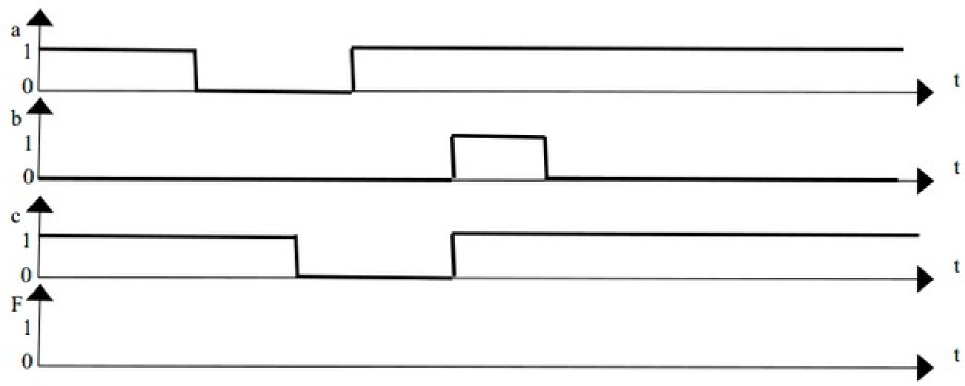
a	b	c	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- Simplifier l'équation
- Produire le logigramme

4.2. Exercice 2



- Donner l'équation de F
- Produire la table de vérité
- Compléter le chronogramme de F

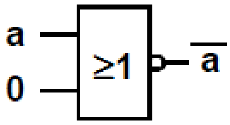


5. Logique NOR / NAND

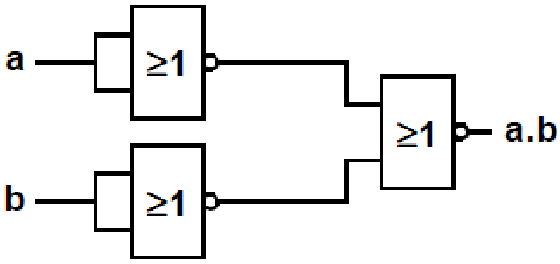
Il est possible d'écrire les trois opérateurs de base ET, OU, NON à partir de l'opérateur NOR, ou de l'opérateur NAND (opérateurs de base de la famille des circuits intégrés logiques T.T.L.[3]).

5.1. Logique NOR

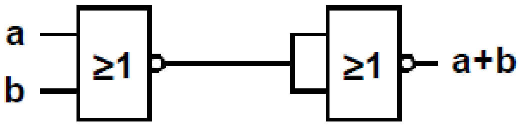
NON



ET

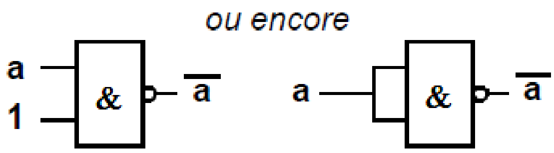


OU

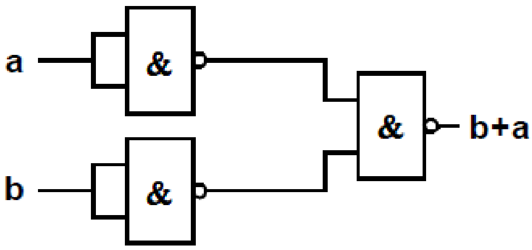


5.2. Logique NAND

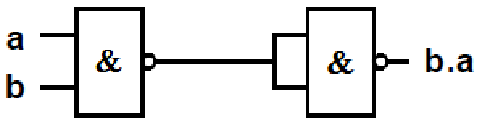
NON



OU



ET



3 Transistor - Transistor - Logic